Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. UPCT
Titulación: Grado en Ingeniería Química
Asignatura: Matemáticas I

Hoja de Problemas: Cálculo Diferencial de Funciones de una Variable Real

1. Calcula los siguientes límites:

	a	b	c	d
1	$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$	$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$	$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$	$\lim_{x\to \infty} \frac{5x^3-4x^2+x-1}{2x^2-x-1}$
2	$\lim_{x\to \infty} \frac{5x-4x^2-1}{2x^3-x-1}$	$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$	$\lim_{x\to 0} x \cot 3x$	$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x(x-2)\tan 2x}$
3	$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-\sqrt{x}}$	$\lim_{x\to \pi} (3\cos 2x)^{\frac{2}{(x-\pi)^2}}$	$\lim_{x\to 0^+} (\arctan x)^{\frac{1}{\log x}}$	$\lim_{x\to 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$

2. Calcula, si es posible, los extremos absolutos de las siguientes funciones en los intervalos que se dan:

$f_1(x) = x^3 - 3$ en $[-2,2]$	$f_2(x) = x + \frac{2+2x}{x^2+1}$ en $[0,3]$	$f_3(x) = e^{-x^2}$ en $\mathbb{R}$

3. Escribir los desarrollos de Taylor de orden 3 de las siguientes funciones, en los puntos que se indican:

$f_1(x) = \log(1+x)$ en $a=0$	$f_2(x) = \sin x^2 - x\cos x$ en $a=0$	$f_3(x) = xe^{x-1}$ en $a=1$

4. Hallar los desarrollos de Taylor de las siguientes funciones, en los puntos dados y del orden que se indica, acotando el resto en el intervalo propuesto:

función	orden	punto	intervalo
$f(x) = \cos x$	6	$a=0$	[-2, 2]
$g(x) = \frac{x+1}{x+2}$	3	$a=3$	[2, 3]
$h(x) = e^{-x}$	n	$a=0$	[-1, 1]

5. **Principio de Mínima Energía en Mecánica [2].** La Física actual considera que la Mecánica se rige por un Principio de Mínima Energía, o para ser más precisos, por el llamado Principio de Hamilton de Mínima Acción. Veamos un ejemplo sencillo. Supongamos que tenemos un muelle sujeto en el techo y sobre el que cuelga una bola de masa m. La energía de este sencillo sistema mecánico consta de dos términos: la energía del muelle, $\frac{1}{2}kx^2$ (donde k es una constante que representa las propiedades elásticas del muelle y x es la deformación del mismo), y la energía potencial de la masa, representada por $-mgx$ (donde g es la aceleración de la gravedad y el signo menos indica que la altura de la masa m es inversamente proporcional a la deformación, al descender el muelle conforme se alarga). De modo que la energía del sistema es

$$f(x) = \frac{1}{2}kx^2 - mgx.$$

El Principio de Mínima Energía establece que el estado de equilibrio de este sistema es el que hace mínima su energía. Comprueba que en dicho estado de equilibrio se da el balance de fuerzas $kx = mg$, es decir, la fuerza del muelle kx (ley de Hooke) contra el peso mg.

6. **Un ejemplo en Economía.** Un concepto básico en Economía es el de *coste marginal*. Supongamos que elaborar un determinado producto tiene unos costes fijos más unos costes variables por unidad de producto producido. Por ejemplo, el coste de imprimir x unidades de un libro cuesta $C(x) = 100 + 3x$, donde 100 son los costes fijos y 3 es el coste por cada libro. El coste marginal se define en Economía como dC/dx. En nuestro caso, $dC/dx = 3$, lo que significa que si x se incrementa en una unidad entonces el coste se incrementa en 3 euros. Si hacemos un símil con la Cinemática, el coste es como la distancia y el coste marginal como la velocidad. De forma completamente análoga se definen los conceptos de ingreso marginal y beneficio marginal. Supongamos ahora que el coste de x anuncios de un determinado producto

viene dado como $C(x) = 900 + 400x - x^2$, donde 900 es el coste fijo, 400 es el coste por anuncio, y $-x^2$ representa una rebaja por número de anuncios. Supongamos también que los ingresos que se obtienen como consecuencia de dichos anuncios son $I(x) = 600x - 6x^2$, donde el término $-6x^2$ representa que una saturación de anuncios produce un rendimiento decreciente. Si definimos el beneficio como los ingresos menos los costes, es decir, $B(x) = I(x) - C(x)$, comprueba que el mayor beneficio se obtiene cuando el coste e ingreso marginales se igualan. Calcula el número óptimo de anuncios que se han de poner y el beneficio que suponen dichos anuncios.

7. **El Principio de Fermat y la Ley de Snell en Óptica [1, 2].** El Principio de Fermat establece que la luz viaja siguiendo el camino más rápido. Supongamos que en un plano tenemos dos puntos de coordenadas $A = (0, r)$ y $B = (s, q)$, con $r, s > 0$ y $q < 0$. Supongamos también que en la región $y > 0$ la luz viaja a velocidad v mientras que al pasar por el eje OX se refracta (al cambiar de medio) y su velocidad pasa a ser w. Denotemos por x el punto del eje OX por el cual la luz pasa de un medio a otro. Se pide:

   a) Calcula, en función de x, el tiempo que tarda la luz en viajar desde A hasta B.
   b) Teniendo en cuenta el Principio de Fermat, encuentra la ecuación que satisface x.
   c) Denotemos por a el ángulo incidente, es decir el ángulo que forma el rayo de luz con la vertical en el punto x antes de ser refractado, y por b el ángulo del rayo de luz en el punto x una vez se ha refractado. Demuestra que se satisface la relación

   $$\frac{\sin a}{v} = \frac{\sin b}{w},$$

   que en Óptica se conoce como Ley de Snell.
   d) El Principo de Fermat también es válido para la luz reflejada. Demuestra que, en este caso, el ángulo de incidencia es igual al reflejado.

8. **Teoría molecular orbital de Hückel [1].** En la Teoría molecular orbital de Hückel, los posibles valores de la energía orbital de los π electrones del eteno (C_2H_4) son los puntos estacionarios de la cantidad

$$\epsilon = \alpha + 2c\left(1 - c^2\right)^{1/2}\beta,$$

donde α y β son constantes (parámetros de Hückel) y c es variable. Comprueba que los posibles valores de la energía orbital de los π electrones del eteno son $\epsilon = \alpha \mp \beta$.

9. [1] La concentración de especies B en el proceso

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$

que consiste en dos reacciones consecutivas irreversibles de primer orden, está dado por

$$[B] = \frac{[A]_0\, k_1}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)$$

donde $k_1 \neq k_2$. Se pide:

   a) Encuentra el tiempo t, en términos de las constantes k_1 y k_2, para el cual $[B]$ alcanza el máximo de concentración.
   b) Muestra que el máximo de concentración está dado por

   $$[B]_{max} = [A]_0\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{k_2/(k_2-k_1)}.$$

10. [1] El potencial de Lennard-Jones para la interacción de dos moléculas separadas por una distancia R está dado por

$$U(R) = \frac{A}{R^{12}} - \frac{B}{R^6}, \quad R > 0,$$

donde A y B son constantes positivas. El término R^{12} representa una fuerza repulsiva (de Pauli) mientras que el correspondiente a R^6 es de tipo atractivo (Van Der Wals). La separación de equilibrio R_e es el valor de R para el que $U(R)$ alcanze su mínimo, y la energía de unión es $D_e = -U(R_e)$. Se pide:

a) Expresa A y B en términos de R_e y D_e.

b) Expresa $U(R)$ en términos de R, R_e y D_e.

11. **Parábolas, elipses e hipérbolas.** Junto con los segmentos de recta, los senos y cosenos (usados para describir oscilaciones), y la exponencial (de gran uso para medir el crecimiento y decaimiento de magnitudes físicas), las parábolas, las elipses y las hipérbolas son las curvas más importantes en Matemáticas. Los Griegos descubrieron que estas curvas se pueden obtener cortando un cono por un plano de forma adecuada por lo que estas curvas también se conocen con el nombre de *cónicas*. El objetivo de este ejercicio es repasar las expresiones analíticas de las cónicas y entender el significado geométrico de los parámetros que aparecen en dichas expresiones.

   a) **Parábolas.** La ecuación general de una parábola es
   $$y = ax^2 + bx + c.$$
   ¿Cuál es el significado geométrico de a, b y c?. Dibuja con Maxima la parábola anterior para distintos valores de dichos parámetros.

   b) **Elipses.** La ecuación general de una elipse es
   $$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$
   ¿Cuál es el significado geométrico de x_0, y_0, a y b.? Dibuja con Maxima la elipse anterior para distintos valores de dichos parámetros. Si $a = b$ tenemos la ecuación de una circunferencia.

   c) **Hipérbolas.** La ecuación general de una hipérbola centrada en el origen es
   $$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$
   ¿Cuál es el significado geométrico de a y b.? Dibuja con Maxima la elipse anterior para distintos valores de dichos parámetros.

   d) ¿Cuál es la diferencia en infinito entre una parábola y una hipérbola ? Respuesta: la hipérbola tiene asíntotas, la parábola no. Calcula las asíntotas de una hipérbola.

12. **Método de Newton para resolver ecuaciones no lineales.** El objetivo es resolver numéricamente la ecuación (no lineal) $f(x) = 0$. Uno de los métodos numéricos más ampliamente utilizados para resolver este problema es el llamado Método de Newton, el cual está implementado en el comando **newton** de Maxima. El algoritmo de este método es el siguiente: (a) se parte de un valor inicial que se considera está próximo a la solución x^* buscada. Denotemos por x_0 este valor inicial. (b) A continuación se aproxima la función $f(x)$ por su polinomio de Taylor de grado 1 en el punto x_0. Se tiene:
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$
Como buscamos que $f(x) = 0$ lo mejor que podemos hacer en este momento es imponer que el término de la derecha en la expresión anterior sea nulo, es decir,
$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0.$$
Resolviendo para x se obtiene el nuevo punto
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$
Repitiendo este proceso vamos obteniendo la sucesión de puntos
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$
(c) Criterio de parada del algoritmo: aunque se pueden usar varios criterios de parada, parece razonable detener el algoritmo cuando se cumpla la condición
$$|f(x_n)| \leq \varepsilon,$$
donde ε es una tolerancia fijada de antemano, por ejemplo, $\varepsilon = 10^{-6}$. Se pide:

   a) Interpreta geométricamente este método.

   b) La convergencia del método de Newton es cuadrática. Esto significa que si el error entre x_n y x^* es h entonces el error entre x_{n+1} y x^* es del orden de h^2. Esto se concreta de manera precisa en el siguiente enunciado: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 (existen las derivadas de f hasta orden 2 y son continuas) y supongamos que f' no se anula en el intervalo $[a, b]$. Supongamos que la ecuación $f(x) = 0$ tiene solución x^* en dicho intervalo. Sea x_n la sucesión obtenida por el método de Newton descrito anteriormente. Utiliza el desarrollo de Taylor de orden 2 para demostrar que si
   $$|x_n - x^*| \leq h, \quad \text{entonces} \quad |x_{n+1} - x^*| \leq \frac{M}{2m}h^2,$$
   donde $M = \text{máx}_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$ y $m = \text{mín}_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$.

Referencias

[1] E. Steiner, The Chemistry Maths book, Oxford University Press, 1996.

[2] G. Strang, Calculus, Wellesley- Cambridge Press, 1991.

HOJA DE PROBLEMAS

1

2b) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x - x(1+x)}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - (1+x) - x}{3x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{e^x \operatorname{sen} x} + e^x \cos x + e^x \cos x - \cancel{e^x \operatorname{sen} x} - 1 - 1}{6x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2e^x \cos x - 2e^x \operatorname{sen} x}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

3a) $$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x - \sqrt{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1 - \frac{1}{2}x^{-1/2}} = \lim_{x\to 1} \frac{2\sqrt{x}}{x(2\sqrt{x}-1)} = \frac{2}{1} = 2$$

3c) $$\lim_{x\to 0^+} (\arctan x)^{\frac{1}{\log x}} \overset{0^0}{=} L$$

$$\log L = \log\left(\lim_{x\to 0^+} (\arctan x)^{\frac{1}{\log x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \log\left((\arctan x)^{\frac{1}{\log x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\log \arctan x}{\log x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

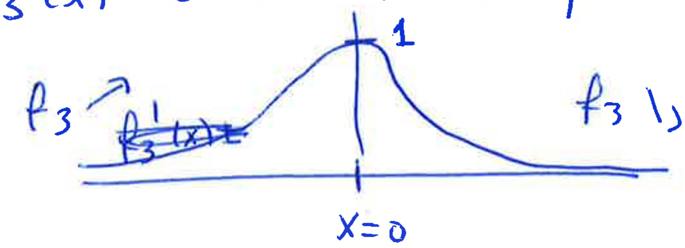
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{(1+x^2)\arctan x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x \arctan x + \frac{1+x^2}{1+x^2}} = 1 \Longrightarrow \boxed{L = e}$$

② $f_3(x) = e^{-x^2}$ en $\mathbb{R}$.

$f_3'(x) = -2x\, e^{-x^2}$

$f_3'(x) = 0 \iff x = 0$ punto crítico.



campana de Gauss.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = 0$, $f_3(x) > 0$

$x = 0$ es un máximo.

④ $f(x) = \cos x$ orden 6, punto $a = 0$ en $[-2, 2]$.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$+ \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad c \in [-2, 2].$$

$f(x) = \cos x$	$f(0) = 1$
$f'(x) = -\operatorname{sen} x$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos x$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = \operatorname{sen} x$	$f'''(0) = 0$
$f^{iv)}(x) = \cos x$	$f^{iv)}(0) = 1$
$f^{v)}(x) = -\operatorname{sen} x$	$f^{v)}(0) = 0$
$f^{vi)}(x) = -\cos x$	$f^{vi)}(0) = -1$

$f^{vii)}(x) = -\operatorname{sen} x$.

Polinomio de Taylor de grado 6 en $a=0$.

$$T_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

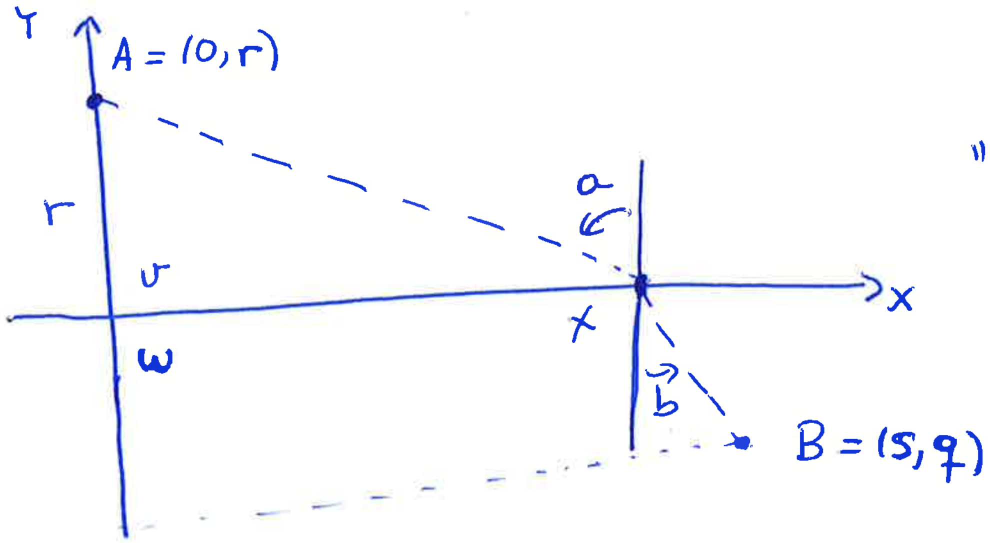
Error:

$$\cancel{Rest}\; E(x) = \left| \frac{f^{VII)}(c)}{7!} x^7 \right|$$

$$= \left| \frac{-\operatorname{sen} c}{7!} x^7 \right| \quad , \qquad x \in [-2,2] \quad c \in [-2,2]$$

$$\leq \frac{1}{7!} 2^7 \qquad |\operatorname{sen} c| \leq 1.$$

7 Principio de Fermat y la Ley de Snell en óptica.



"refracción"

a = ángulo de incidencia
b = " refractado.

a) $\text{tiempo} = \dfrac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$.

Tiempo desde A hasta $(x,0)$:

$$T_1(x) = \frac{\sqrt{r^2+x^2}}{v}$$

Tiempo desde $(x,0)$ hasta B:

$$T_2(x) = \frac{\sqrt{(s-x)^2+q^2}}{w}$$

Tiempo desde A hasta B:

$$T(x) = T_1(x) + T_2(x) = \frac{\sqrt{r^2+x^2}}{v} + \frac{\sqrt{(s-x)^2+q^2}}{w}$$

b) x es el punto en que $T(x)$ alcanza su mínimo.
Por tanto,

$T'(x) = 0$ si x es un punto interior $(x \neq 0,\ x \neq s)$

$$T'(x) = \frac{1}{v} \frac{1}{2\sqrt{r^2+x^2}} \cdot 2x + \frac{1}{w} \frac{1}{2\sqrt{(s-x)^2+q^2}} \cdot 2(s-x)\cdot(-1)$$

$$= \frac{1}{v} \frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}} - \frac{1}{w} \frac{s-x}{\sqrt{(s-x)^2+q^2}} = 0.$$

c) Por trigonometría tenemos:

$$\operatorname{sen} a = \frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}, \quad \operatorname{sen} b = \frac{s-x}{\sqrt{(s-x)^2+q^2}}$$

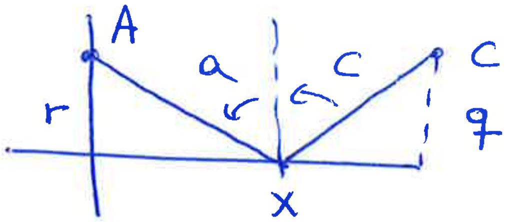
Sustituyendo en la ecuación $t'(x)=0$ se tiene:

$$\frac{1}{v}\frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}-\frac{1}{w}\frac{s-x}{\sqrt{(s-x)^2+q^2}}=0 \iff$$

$$\frac{\operatorname{sen} a}{v}-\frac{\operatorname{sen} b}{w}=0 \iff$$

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen} a}{v}=\frac{\operatorname{sen} b}{w}}$$ Ley de Snell.

d)



Como ahora sólo tenemos un medio en que la velocidad viaja a velocidad v, sustituyendo en la ley de Snell.

$$\frac{\operatorname{sen} a}{v}=\frac{\operatorname{sen} c}{v} \iff \operatorname{sen} a=\operatorname{sen} c$$

$$\Rightarrow a=c \quad \text{pues } 0\le a,b\le \pi/2.$$

⑧ Teoría molecular orbital de Hückel.

eteno C_2H_4 . Energía orbital : puntos estacionarios de.

$$\varepsilon(c)=\alpha+2c(1-c^2)^{1/2}\beta$$

$$\frac{d\varepsilon}{dc}=2(1-c^2)^{1/2}\beta+\cancel{2}c\beta\frac{1}{\cancel{2}}(1-c^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2c)=0.$$

Multiplicando todo por $(1-c^2)^{1/2}$:

$$2\beta(1-c^2) - 2c^2\beta = 0$$

$$\cancel{2\beta} - 2\cancel{\beta}c^2 - 2\cancel{\beta}c^2 = 0;$$

$$2c^2 = 1 \rightarrow c^2 = \frac{1}{2} \rightarrow c = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \alpha + \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\beta = \alpha + \beta.$$

$$\varepsilon\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \alpha - \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\beta = \alpha - \beta.$$

(9)

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$

$$[B] = \frac{[A]_0 k_1}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right), \quad k_1 \neq k_2.$$

a) $$\frac{d[B]}{dt} = \frac{[A]_0 k_1}{k_2 - k_1}\left(-k_1 e^{-k_1 t} + k_2 e^{-k_2 t}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad k_2 e^{-k_2 t} = k_1 e^{-k_1 t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{k_2}{k_1} e^{(k_1-k_2)t} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{(k_1-k_2)t} = \frac{k_1}{k_2}$$

También:

$$\frac{k_2}{k_1} = e^{(k_2-k_1)t}$$

$$\log\frac{k_2}{k_1} = (k_2-k_1)t$$

$$\boxed{t = \frac{1}{k_2-k_1}\log\frac{k_2}{k_1}}$$

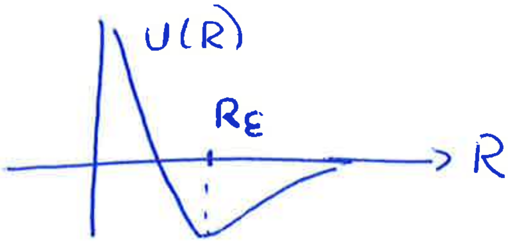
Tomando logaritmos neperianos:

$$(k_1-k_2)t = \log\frac{k_1}{k_2} \Leftrightarrow \boxed{t = \frac{1}{k_1-k_2}\log\frac{k_1}{k_2}}$$

10) $U(R) = \frac{A}{R^{12}} - \frac{B}{R^6}$ potencial de Lennard-Jones para átomos o moléculas neutros.

$A = 4\varepsilon\sigma^{12}$, $\varepsilon \equiv$ profundidad del potencial

$B = 4\varepsilon\sigma^{6}$ $\sigma \equiv$ distancia en la que el potencial entre partículas es cero.



$\frac{A}{R^{12}} \equiv$ repulsión de Pauli

$\frac{B}{R^6} \equiv$ atracción de Van Der Waals

a)

$$\frac{dU}{dR} = -12AR^{-13} + 6BR^{-7} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 6BR^{-7} = 12AR^{-13}$$

Multiplicando por $\frac{1}{6}R^7$ se tiene:

$$B = 2AR^{-6} \longrightarrow BR^6 = 2A$$

Por tanto, $R_e = \left(\frac{2A}{B}\right)^{1/6}$

$$D_e = -U(R_e) = \frac{B}{R_e^6} - \frac{A}{R_e^{12}}$$

Tenemos el sistema de ecuaciones lineal en (A,B):

$$\left.\begin{array}{l} 2A - BR_e^6 = 0 \\ -\frac{1}{R_e^{12}}A + B\frac{1}{R_e^6} = D_e \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{2A}{R_e^{12}} - \frac{B}{R_e^6} = 0 \\ -\frac{A}{R_e^{12}} + \frac{B}{R_e^6} = D_E \end{array}\right.$$

$$B = \frac{2A}{R_e^6} = \frac{2R_e^{12}D_e}{R_e^6} = 2R_e^6 D_e \qquad \frac{1}{R_e^{12}}A = D_e$$

$$\Rightarrow \boxed{A = R_e^{12}D_e}$$

$$\boxed{B = 2R_e^6 D_e}$$

b) $U(R) = \dfrac{A}{R^{12}} - \dfrac{B}{R^6}$

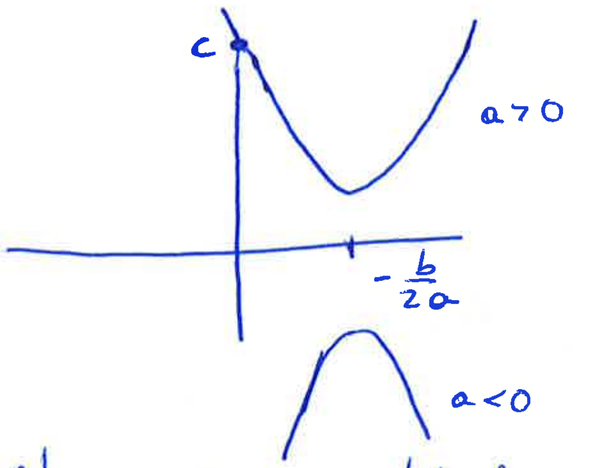
$$= \left(\frac{Re}{R}\right)^{12} De - 2\left(\frac{Re}{R}\right)^{6} De$$

(11) Parábolas, elipses e hipérbolas.

a) Parábolas $\quad y \equiv f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b = 0 \iff x = -\dfrac{b}{2a}$ ≡ vértice de la parábola.

$f(0) = c$



c ≡ mide la altura a la que está la parábola.

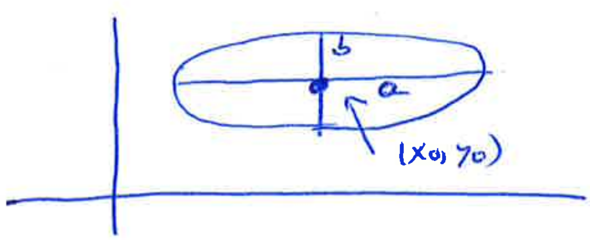
a ≡ mide el sentido (hacia arriba si a>0), o hacia abajo si a<0
y lo espigada que es (si a>>1 → U ; si a<1 ◡).

b) $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$

(x_0, y_0) ≡ centro de la elipse

a ≡ semieje en el eje x

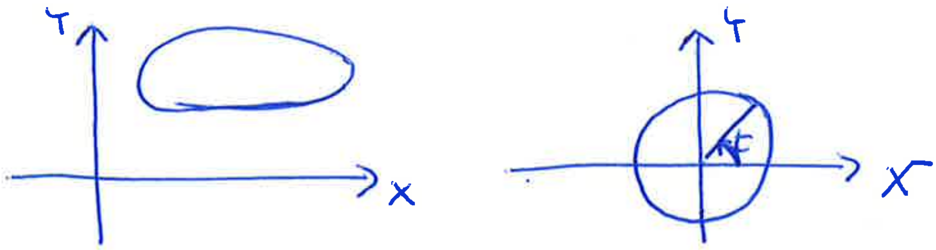
b ≡ " " " " y



Cambio de variables que transforma una elipse en una circunferencia:

$$\frac{x-x_0}{a} = \bar{X} \quad ; \quad \frac{y-y_0}{b} = \bar{Y}$$

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = 1 \Rightarrow \bar{X}^2 + \bar{Y}^2 = 1$$



Ecuaciones paramétricas de la elipse:

$$\begin{cases} \bar{X} = \cos t \\ \bar{Y} = \operatorname{sen} t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-x_0}{a} = \cos t \\ \dfrac{y-y_0}{b} = \operatorname{sen} t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + b\operatorname{sen} t \end{cases}.$$

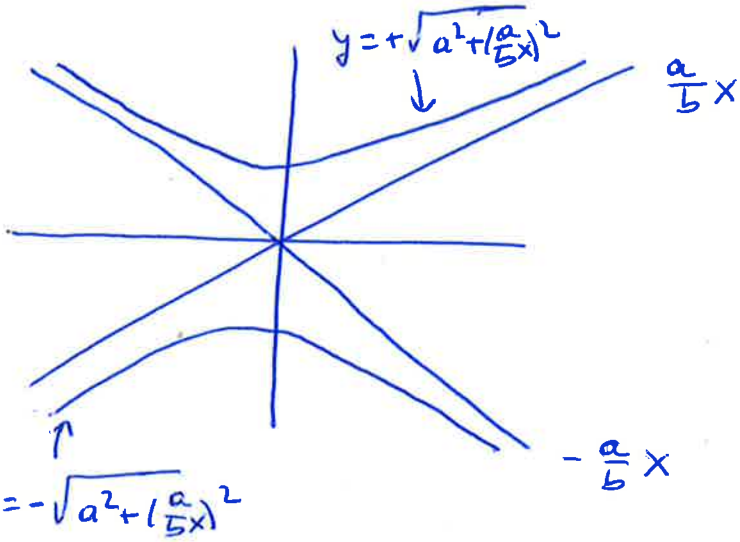
$t \in [0, 2\pi[$

c) Hipérbolas

d)

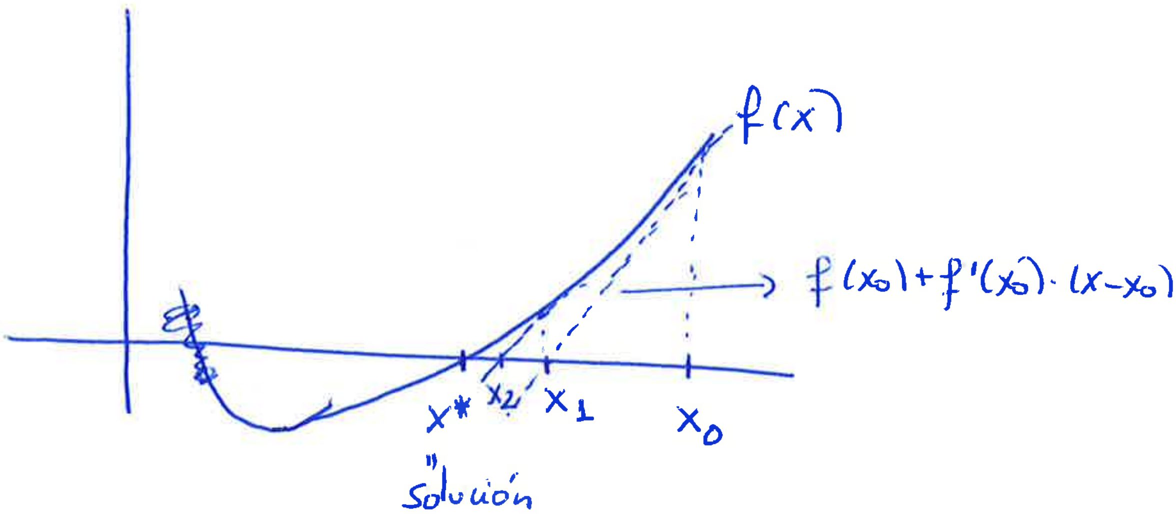
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad \frac{y^2}{a^2} = 1 + \frac{x^2}{b^2};$$

$$y^2 = a^2 + \left(\frac{a}{b}x\right)^2 \to y = \pm\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{b}x\right)^2} \xrightarrow[x \to \infty]{} \underbrace{\pm\frac{a}{b}x}_{\text{asíntotas}}$$



(12) Método de Newton

objetivo: resolver numéricamente la ecuación $f(x)=0$.



$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0;$$

$$f(x_0) + f'(x_0)\cdot x - f'(x_0)\cdot x_0 = 0;$$

$$f'(x_0)\, x = f'(x_0)\cdot x_0 - f(x_0);$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Criterio de parada $|f(x_n)| \leq \varepsilon \simeq 10^{-6}$.

Convergencia del método.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$. f' no se anula en $[a,b]$.

x^* solución de $f(x)=0$. Demuestra que si

$$|x_n - x^*| \leq h \implies |x_{n+1} - x^*| \leq \frac{M}{2m} h^2$$

donde $M = \max\limits_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$, $m = \min\limits_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$.

Desarrollando por Taylor hasta orden 2:

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{1}{2} f''(c)(x^* - x_n)^2$$

$c \in [x^*, x_n]$ ó $c \in [x_n, x^*]$.

Por tanto, dividiendo por $f'(x_n)$:

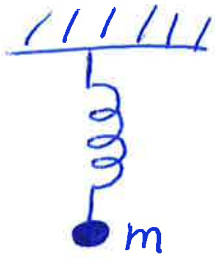
$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x^* - x_n + \frac{1}{2} \frac{f''(c)}{f'(x_n)} (x^* - x_n)^2;$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x^* + \frac{1}{2} \frac{f''(c)}{f'(x_n)} (x^* - x_n)^2;$$

$$x_{n+1} - x^* = \frac{1}{2} \frac{f''(c)}{f'(x_n)} (x^* - x_n)^2;$$

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \frac{1}{2} \frac{M}{m} |x^* - x_n|^2 = \frac{1}{2} \frac{M}{2m} h^2. \quad \#.$$

(5) Principio de Mínima energía



$$\text{Energía} \equiv E(x) = \frac{1}{2}kx^2 - mgx$$

$$E'(x) = kx - mg = 0;$$

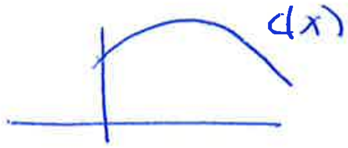
En estado de equilibrio

$$\underbrace{kx}_{\substack{\text{fuerza del} \\ \text{muelle} \\ \text{(ley de Hooke)}}} = \underbrace{mg}_{\text{peso.}}$$

(6)

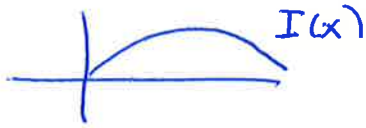
$$c(x) = 100 + 3x$$

coste marginal $\frac{dc}{dx} = 3$



$$c(x) = 900 + 400x - x^2$$

$$I(x) = 600x - 6x^2$$



$$B(x) = -c(x) + I(x) \quad \text{beneficio.}$$

$$0 = B'(x) = I'(x) - c'(x) \iff \underbrace{I'(x)}_{\substack{\text{ingreso} \\ \text{marginal}}} = \underbrace{c'(x)}_{\substack{\text{coste} \\ \text{marginal.}}}$$

$$I'(x) = 600 - 12x$$

$$c'(x) = 400 - 2x \qquad 600 - 12x = 400 - 2x;$$

$$200 = 10x; \quad \boxed{x = 20}$$